

1. はじめに

近年、長周期地震動や大きな加速度レベルの地震動が観測されており、長時間・大変形の繰返しに対する構造物の評価手法が検討されている¹⁾。このような地震動では、構造物は弾性応答を超えた非線形応答を示す恐れがある。構造物の耐震性を定量的に明示する一つの方法として確率論的なアプローチが導入されつつある。米国のFEMA P695では、地震動の加速度レベルを徐々に増大させながら、構造物の弾性域から終局域に至る地震応答を確率論的に評価する手法が示されている。このような性能評価には、終局域の非線形な荷重-変位関係（履歴ループ）までを表現できるモデルが必要となる。

免震装置等の解析モデルは主として、一方向の載荷試験結果より構築される。しかし、構造物の地震応答は三次元挙動であり、水平方向については二方向の外力が構造物に作用する。これにより、構造物の力学特性は直交する軸からも影響を受ける。加えて弾塑性挙動の場合、塑性域でのひずみ進展が一般にp-ノルム降伏面と塑性流動則に従うが、これを考慮可能な履歴モデルは一般化に至っていない²⁾。したがって、構造物の応答をより精緻に評価するためには、二軸間の連成作用を考慮した解析モデルが望まれる。

本論文では、ハードニング特性やスリップ特性など多様な履歴ループ形状を統一した構成式で再現可能な、二方向入力に対応した微分方程式型の履歴モデルを提案する。本履歴モデルは、塑性力学で扱われるp-ノルムと関連流動則に立脚しており、弾性限界および降伏耐力における二方向入力の連成効果を明示的に扱うことができる。さらに、数種類の免震装置を対象に二方向載荷試験を実施し、履歴ループ形状との整合性を検証する。

2. 一方向の微分方程式型履歴モデル

図1に示す履歴ループ形状は、載荷と除荷の骨格曲線 $T \cdot G$ を変位 x で微分可能な任意の関数で定義することで表現される。骨格曲線を4次関数で定義すれば、骨格曲線 $T \cdot G$ は次式で与えられる。

$$T(x) = a_{T4}x^4 + a_{T3}x^3 + a_{T2}x^2 + a_{T1}x + b_{T0} \quad (1)$$

$$G(x) = a_{G4}x^4 + a_{G3}x^3 + a_{G2}x^2 + a_{G1}x + b_{G0} \quad (2)$$

ここで、 $a_{T4} \sim a_{T1}$ 、 $a_{G4} \sim a_{G1}$ は骨格曲線を表す係数、 $b_{T0} \cdot b_{G0}$ は変位0における切片荷重である。骨格曲線の勾配（剛性）は上式を変位 x で微分すれば、

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4a_{T4}x^3 + 3a_{T3}x^2 + 2a_{T2}x + a_{T1} \quad (3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 4a_{G4}x^3 + 3a_{G3}x^2 + 2a_{G2}x + a_{G1} \quad (4)$$

となる。載荷と除荷とで骨格曲線に関する現在の荷重 F の位置を示す無次元量 $s_1 \cdot s_2$ を

$$s_1 = \frac{T - F}{T - G} \quad (5)$$

$$s_2 = \frac{F - G}{T - G} \quad (6)$$

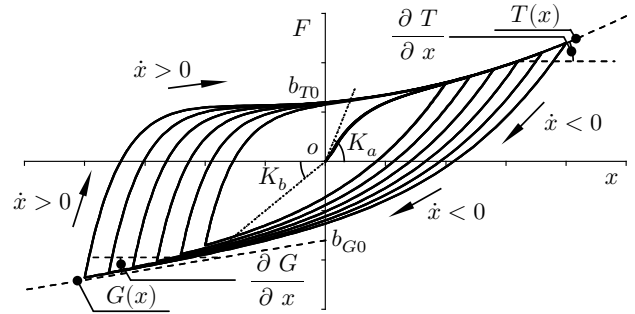


図1 微分方程式型履歴モデルから得られる履歴ループ

と定義する。載荷と除荷の骨格曲線への進展度合いを $s_1 \cdot s_2$ で表せば、次式を得る。

$$S_1 = \text{sgn}(s_1) (2|s_1|)^{1/n_s} \quad (7)$$

$$S_2 = \text{sgn}(s_2) (2|s_2|)^{1/n_s} \quad (8)$$

ここで、 sgn は符号関数、 n_s は弾性域から塑性域に遷移する滑らかさを制御する係数である。 $n_s = 1$ で最も曲率が大きくなり、 $n_s = \infty$ でバイリニア形状に近づく。

本履歴モデルで表現される履歴ループの有効接線剛性 k は、速度 $\dot{x} > 0$ のとき弾性域の剛性 K_a から骨格曲線の剛性 $\partial T / \partial x$ に遷移し、速度 $\dot{x} < 0$ のとき弾性域の剛性 K_b から骨格曲線の剛性 $\partial G / \partial x$ に遷移する（図1参照）。これらの関係を上式の $S_1 \cdot S_2$ を用いて表せば、有効性接線剛性は、

$$k = \left\{ S_1 K_a + (1 - S_1) \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \frac{1 + \text{sgn}(\dot{x})}{2} + \left\{ S_2 K_b + (1 - S_2) \frac{\partial G}{\partial x} \right\} \frac{1 - \text{sgn}(\dot{x})}{2} \quad (9)$$

となる。したがって、一方向の履歴ループ形状の荷重は次式の微分方程式で与えられる。

$$\dot{F} = k\dot{x} \quad (10)$$

3. 二方向の微分方程式型履歴モデル

3.1 構成式の定義

次に、二次元水平面の $X-Y$ 座標系での微分方程式型履歴モデルについて考える。その座標系での変位・速度・荷重のベクトルを、

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (13)$$

とおく。式(1)・(2)に着目すると、骨格曲線は切片荷重 $b_{T0} \cdot b_{G0}$ とそれ以外の項との和で与えられている。これは、履歴ループに面積（減衰エネルギー）を与える減衰力 F_d と、変位の大きさに依存する復元力 F_e の和となる。水平面内における復元力 \mathbf{F}_e と減

衰力 F_d の発現方向を確認するため、それぞれ変位 \mathbf{u} および速度 $\dot{\mathbf{u}}$ との内積をとると、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_e &= \mathbf{u}^\top \mathbf{F}_e = [x, y] \begin{bmatrix} -k_e x \\ -k_e y \end{bmatrix} \\ &= -k_e (x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F}_d &= \dot{\mathbf{u}}^\top \mathbf{F}_d = [\dot{x}, \dot{y}] \begin{bmatrix} -c_d \dot{x} \\ -c_d \dot{y} \end{bmatrix} \\ &= -c_d (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで、 k_e はばね剛性、 c_d は減衰定数である。 $x^2 + y^2 > 0, \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ であるため、これらの内積は常に負となる。つまり、復元力 \mathbf{F}_e は変位 \mathbf{u} とは逆向きに原点 o を、減衰力 \mathbf{F}_d は速度 $\dot{\mathbf{u}}$ とは逆向きに変位の軌跡と逆向きを指向する。図2に、任意の点 p_i から p_{i+4} まで変位した場合の復元力 \mathbf{F}_e と減衰力 \mathbf{F}_d の発現方向を示す。減衰力 \mathbf{F}_d の発現方向を速度の方向余弦（単位ベクトル）として、

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\|\dot{\mathbf{u}}\|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (16)$$

で与える。载荷と除荷の骨格曲線 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{G}$ は次式で表現される。

$$\begin{aligned} T_x(x, \dot{x}) &= a_{T4}x^4 + a_{T3}x^3 + a_{T2}x^2 + a_{T1}x \\ &\quad + b_{T0} \cdot e_x \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} G_x(x, \dot{x}) &= a_{G4}x^4 + a_{G3}x^3 + a_{G2}x^2 + a_{G1}x \\ &\quad + b_{G0} \cdot e_x \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T_y(y, \dot{y}) &= a_{T4}y^4 + a_{T3}y^3 + a_{T2}y^2 + a_{T1}y \\ &\quad + b_{T0} \cdot e_y \cdot \text{sgn}(\dot{y}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_y(y, \dot{y}) &= a_{G4}y^4 + a_{G3}y^3 + a_{G2}y^2 + a_{G1}y \\ &\quad + b_{G0} \cdot e_y \cdot \text{sgn}(\dot{y}) \end{aligned} \quad (20)$$

これらを各方向の変位で微分すれば、骨格曲線の有効接線剛性は次式で定義される。

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (21)$$

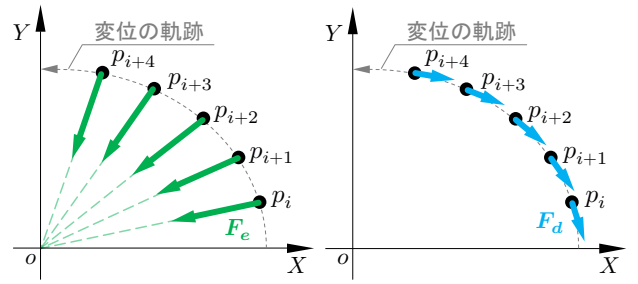
なお、上式の骨格曲線 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{G}$ には、非対角成分が含まれていないため、 $k_{xy} = k_{yx} = 0$ となる。

各軸の骨格曲線 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{G}$ が変位 \mathbf{u} に対して連成効果を受けずに独立であると仮定した場合、その荷重は次式の微分方程式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{F}}^{\text{trial}} = \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}} \quad (22)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{F}}^{\text{trial}}$ を試行荷重と称す。弾性域では試行荷重 $\dot{\mathbf{F}}^{\text{trial}}$ がそのまま採用される。一方で、骨格曲線 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{G}$ を進展する塑性域では、試行荷重 $\dot{\mathbf{F}}^{\text{trial}}$ は二軸間の連成が考慮されていないため、 p -ノルム降伏面の幾何学的な制約を満たさない。そこで図3に示すように、試行荷重 $\dot{\mathbf{F}}^{\text{trial}}$ の法線方向成分（ \mathbf{n} ：法線ベクトル）を塑性係数 λ_{pl} に応じて減少させ、最終的な荷重を次式の微分方程式で定義する。

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}} - \lambda_{pl} (\mathbf{n}^\top \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{n} \quad (23)$$



(a) 復元力 F_e (b) 減衰力 F_d
図2 荷重の発現方向

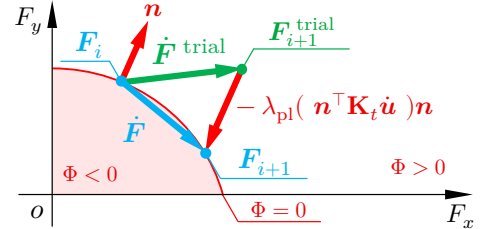


図3 塑性域の荷重進展

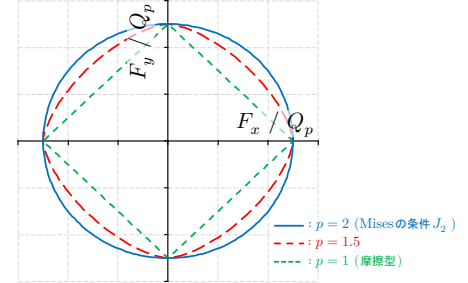


図4 p -ノルムを変数とする降伏関数 Φ の形状

3.2 p -ノルム降伏関数と関連流動則

(1) p -ノルム降伏関数の等価力と等価降伏半径

各軸方向で生じる荷重 (F_x, F_y) から、それらの等価荷重 F_p を p -ノルムとして、

$$\begin{aligned} F_p &= \|\mathbf{F}\|_p \\ &= (|F_x|^p + |F_y|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1 \end{aligned} \quad (24)$$

と定義する。骨格曲線を進展する各象限の荷重（降伏力）を、

$$F_{x\text{yld}} = \begin{cases} T_x(x, \dot{x}) & , F_x \geq 0, \\ G_x(x, \dot{x}) & , F_x < 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$F_{y\text{yld}} = \begin{cases} T_y(y, \dot{y}) & , F_y \geq 0, \\ G_y(y, \dot{y}) & , F_y < 0 \end{cases} \quad (26)$$

とおき、それらの荷重から等価降伏半径 Q_p を、

$$Q_p(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = (|F_{x\text{yld}}|^p + |F_{y\text{yld}}|^p)^{1/p} \quad (27)$$

とする。このとき降伏関数 Φ は、

$$\Phi(\mathbf{F}; \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{F_p}{Q_p(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})} - 1 \quad (28)$$

で与えられる。 p -ノルムを変数とする降伏関数 Φ の形状は図4となる。

(2) 降伏面の法線ベクトル

二方向载荷時の荷重進展方向を決定するため、降伏面の外向き法線ベクトル \mathbf{n} を求める。各軸から得られる試行荷重 $\dot{\mathbf{F}}^{\text{trial}}$ は、軸間で独立に骨格曲線を追従するため、二軸間の連成効果は考慮されてい

い。本モデルでは、 p -ノルム降伏面を用いて二軸間の荷重を連成させながら、 p -ノルム降伏面の幾何学的な制約を満足させる。

降伏面は荷重空間 (F_x, F_y) において、等価荷重 F_p が等価降伏半径 Q_p に達する境界として定義される。関連流動則に基づき、試行荷重 $\mathbf{F}^{\text{trial}}$ の法線方向成分を塑性係数に応じて削減することで、荷重 \mathbf{F} は p -ノルムの幾何学的関係が満たされる。

法線ベクトル \mathbf{n} は、降伏関数 Φ を各軸の荷重 \mathbf{F} で偏微分することで得られる。

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{F}}\Phi &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial F_x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial F_y} \end{bmatrix} = \frac{1}{Q_p} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_p}{\partial F_x} \\ \frac{\partial F_p}{\partial F_y} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{Q_p F_p^{p-1}} \begin{bmatrix} F_x |F_x|^{p-2} \\ F_y |F_y|^{p-2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

したがって、降伏曲面の外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} は、次式で与えられる。

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_{\mathbf{F}}\Phi}{\|\nabla_{\mathbf{F}}\Phi\|} \propto \begin{bmatrix} F_x |F_x|^{p-2} \\ F_y |F_y|^{p-2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

上式を用いれば、 $p=2$ のとき $F_2 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ であり、その降伏面は J_2 型が与えられる。外向きの法線ベクトル \mathbf{n} は荷重ベクトル \mathbf{F} と平行となる。

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (31)$$

3.3 関連流動則に基づく履歴ループの荷重

関連流動則では、塑性流動方向は法線ベクトル \mathbf{n} に一致するものと仮定し、試行荷重 $\mathbf{F}^{\text{trial}}$ に対してその法線方向成分である次式を評価する。

$$\dot{\mathbf{F}}_{\parallel}^{\text{trial}} = \mathbf{n}^{\top} \dot{\mathbf{F}}^{\text{trial}} = \mathbf{n}^{\top} \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}} \quad (32)$$

骨格曲線を進展する荷重領域では、弾性域の荷重(試行荷重 $\mathbf{F}^{\text{trial}}$)から、上式の法線方向成分を塑性係数に応じて削減することで荷重が求められる。その塑性係数を有効塑性係数 λ_{pl} として定式化する。任意の変位における荷重ベクトルから塑性比率を

$$r = \frac{F_p}{Q_p}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (33)$$

とする。また、平滑化係数 ζ を

$$\zeta = r^{N_{\text{sm}}} \quad (34)$$

で定義する。ここで、 N_{sm} は弾性域から塑性域の移行変わりを制御する変数である。さらに載荷判定は

$$H = \begin{cases} 1, & \mathbf{n}^{\top} \dot{\mathbf{u}} > 0, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (35)$$

によって行う。以上より有効塑性係数 λ_{pl} を

$$\lambda_{\text{pl}} = \zeta H \quad (36)$$

と定義する。最終的な二次元の荷重 \mathbf{F} は、次式の微分方程式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \dot{\mathbf{F}}^{\text{trial}} - \lambda_{\text{pl}} \dot{\mathbf{F}}_{\parallel}^{\text{trial}} \mathbf{n} \\ &= \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}} - \lambda_{\text{pl}} (\mathbf{n}^{\top} \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (37)$$

第1項は各軸独立の骨格曲線 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{G}$ に基づく試行荷重 $\mathbf{F}^{\text{trial}}$ を表し、第2項は降伏面の法線方向成分を

削減することで、 p -ノルム降伏面上での塑性流動が表現される。

4. 試験・解析結果

4.1 載荷試験

本モデルの有効性を検証するため、免震装置を対象とした二方向の載荷試験を実施した。試験体には天然ゴム系積層ゴム (NRB)、鉛プラグ入り積層ゴム (LRB)、弾性すべり支承 (SSR) を用いた。

NRB と LRB は、ハードニング後の履歴ループ形状を把握すべく、 X 方向にせん断ひずみ 330% のオフセットを与えた後に Y 方向へ載荷した。LRB についてはさらに、二方向のオービットが楕円形状となる変位を入力し、ハードニング前後の履歴ループ形状を確認した。

SSR は多軸応力状態を考慮するため、面圧を変動(図9中央参照)させて載荷試験を実施した。

4.2 解析結果

図5から図9に載荷試験の再現解析結果を示す(左から一方向の履歴ループ、入力変位のオービット、 X 方向・ Y 方向の履歴ループ)。二方向モデルの諸元は各々一方向入力で得られた履歴ループより変数(骨格曲線の関数)を同定した。図9の中央には面圧の変動を面圧-変位関係として示す。

本モデルは各試験条件で得られた荷重を再現している。特に、図7と図8 (LRB: $p=2$) では、試験結果に荷重低下が認められるが、履歴エネルギーの蓄積(温度上昇)に応じて骨格曲線の関数を低下させることで、繰返し載荷に伴う荷重低下が表現される。また、図9 (SSR: $p=1$) は面圧の変動により履歴曲線も変動するが、骨格曲線を

$$\mathbf{T} = \sigma A \{0.058 - 0.024 \exp(-27.2|\dot{\mathbf{u}}|)\} \sigma^{-0.445} \quad (38)$$

$$\mathbf{G} = -\sigma A \{0.057 - 0.023 \exp(-24.9|\dot{\mathbf{u}}|)\} \sigma^{-0.433} \quad (39)$$

と定義することで、面圧 σ と速度の依存性も精度よく再現できる。なお、 A はゴム部受圧面積である。

二方向同時に変位を入力した場合(各図右)、一方向モデルでは二方向特有の履歴ループ形状を表現できず、試験結果と乖離する。本モデルは、ハードニング特性の早期化や変位オービットに応じた履歴ループ形状の変化を再現し、試験結果と整合した。

5. まとめ

本論文では、 p -ノルム降伏面および関連流動則に基づき二方向入力に対応した微分方程式型履歴モデルを提案した。また、数種類の免震装置をモデル化対象として、それらの試験結果と解析によって得られる履歴ループ形状との整合性を検証した。

その結果、荷重の進展方向を方向余弦や関連流動則で定義することにより、統一した構成式で二方向入力の各試験で確認された履歴ループ形状を高い精度で再現が可能となった。この再現解析結果は、本履歴モデルの有効性を示すものである。

6. 参考文献

- 1) 近藤明洋ほか5名：鉛入り積層ゴムの熱・力学的連成挙動を考慮した応答解析法，日本建築学会構造系論文集，第83巻，第753号，pp.1595-1605，2018.11
- 2) 日本建築学会：免震構造設計指針，第4版，2013.10

表1 载荷試験の条件

試験番号	試験体	加力パターン	X方向の変位 [mm]	X方向の速度 [m/s]	Y方向の変位 [mm]	Y方向の速度 [m/s]	面圧 [MPa]
1	NRB	一方向 (漸増)	148	0.019	—	—	5.0
2	NRB	オフセット (漸増)	148	0.019	89.6	0.011	5.0
3	LRB	一方向 (漸増)	148	0.019	—	—	5.0
4	LRB	オフセット (漸増)	148	0.019	89.6	0.011	5.0
5	LRB	一方向	167	0.262	—	—	12.0
6	LRB	楕円形状	134	0.105	26.7	0.021	12.0
7	LRB	一方向	85.3	0.131	—	—	12.0
8	LRB	楕円形状	53.5	0.042	26.7	0.021	12.0
9	SSR	一方向	150	0.100	—	—	2.0~5.0
10	SSR	面圧変動	150	0.100	75	0.050	2.0~5.0

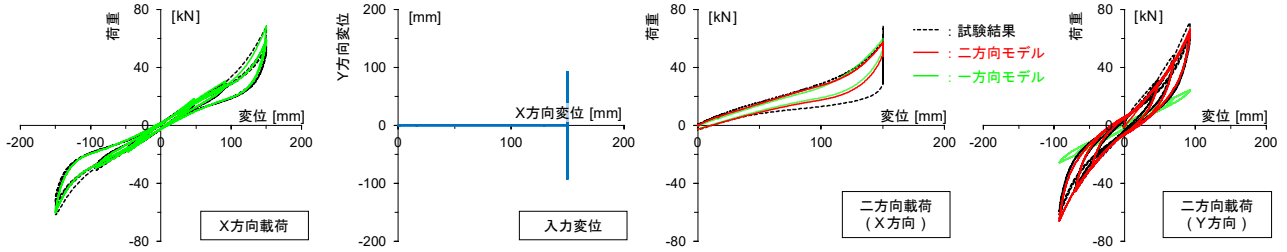


図5 NRBの履歴ループを対象とした試験結果と解析結果との比較

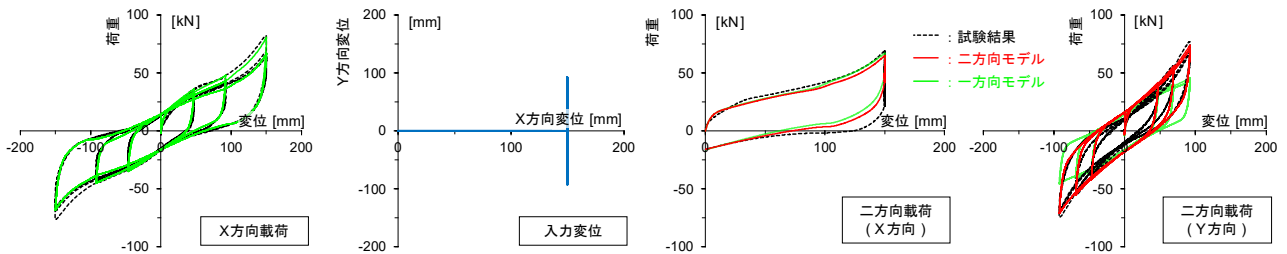


図6 LRBの履歴ループを対象とした試験結果と解析結果との比較

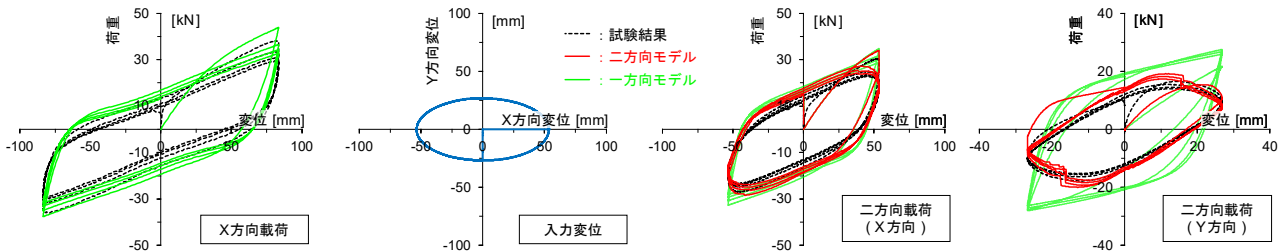


図7 小変形域の楕円変位オービット入力におけるLRBの履歴ループを対象とした試験結果と解析結果との比較

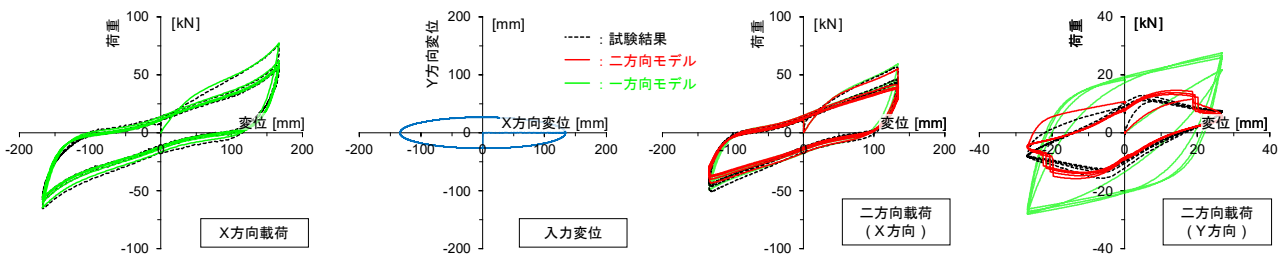


図8 大変形域の楕円変位オービット入力におけるLRBの履歴ループを対象とした試験結果と解析結果との比較

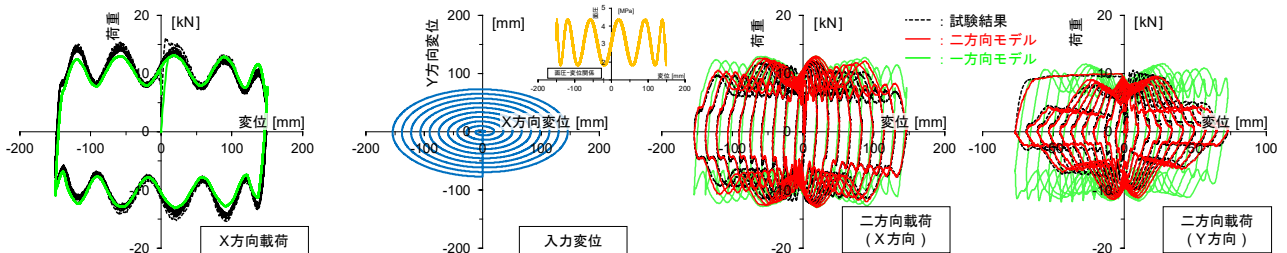


図9 面圧を変動させたSSRの履歴ループを対象とした試験結果と解析結果との比較